V VR, $\dim V = n$

$F: V \longrightarrow V$ Endomorphismus

$$F(\underline{v}) = \lambda \cdot \underline{v}$$

Eigenvektor EV (falls $\underline{v} \neq \underline{0}$) Eigenwert $(\in K)$ EW

$$\mathrm{Eig}(F;\lambda) = \{\underline{v} \in V \mid F(\underline{v}) = \lambda \cdot \underline{v}\}$$

$$\chi_F(t) := \det(F - t \cdot \mathrm{id}_V) \in K[t]$$

„chi" „charakteristisch"

$$= \det\left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) - t \cdot E_n\right)$$

(unabhängig von Wahl von $\mathcal{B}$)

$$\chi_A(t) := \chi_{F_A}(t)$$

$n \times n$-Matrix $= \det(A - t \cdot E_n)$

(hängt nur von Ähnlichkeitsklasse von A ab)

Satz: Die EW von F sind die Nullstellen von χ_F.
[5.2.1]

Rezept: EW & EV von F_A bestimmen.

$$F_A : K^n \longrightarrow K^n$$

1. Berechne $\chi_A(t) = \det(A - t \cdot E_n)$
2. Bestimme die Nullstellen von von χ_A.
   Diese Nullstellen sind die EW.
3. Löse für jeden EW λ das LGS $(A - \lambda \cdot E_n) \cdot \underline{x} = \underline{0}$

$$\operatorname{Eig}(F_A; \lambda) = \operatorname{Lös}(A - \lambda \cdot E_n)$$

A $n \times n$-Matrix

$$\chi_A(t) = \det \begin{pmatrix} a_{11}-t & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & a_{2n} \\ a_{31} & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn}-t \end{pmatrix}$$

$$= c_n t^n + c_{n-1} t^{n-1} + \dots + c_1 t + c_0$$

$(c_i \in K)$

Notiz:

$\deg(\chi_A) = n$	$\deg(\chi_F) = \dim V$
$c_n = (-1)^n$	$c_n = (-1)^{\dim V}$
$c_{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot tr(A)$	$c_{n-1} = (-1)^{\dim V - 1} \cdot tr(F)$
$c_0 = \det(A)$	$c_0 = \det(F)$

Satz: Ähnliche Matrizen haben dieselbe Spur.

Def: $tr(F) := tr(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F))$ für beliebige Basis $\mathcal{B}$.

Vorlesung 10:

$$\chi_F = g \cdot (t-\lambda_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_k)^{r_k},$$

wobei $g \in K[t]$ ohne Nullstellen,

$\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die verschiedenen Nullstellen von χ_F

$$r_i =: \mu(\chi_F; \lambda_i)$$

Def: F wie zuvor, $\lambda \in K$ [5.3.2]

$$\left.\begin{array}{ll} \mu(\chi_F, \lambda) & \underline{\text{algebraische}} \\ \dim(\mathrm{Eig}(F; \lambda)) & \underline{\text{geometrische}} \end{array}\right\} \text{Vielfachheit von } \lambda$$

Satz: [5.3.2]

$$\begin{pmatrix} \text{geom. Vielf.} \\ \text{von } \lambda \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \text{alg. Vielf.} \\ \text{von } \lambda \end{pmatrix}$$

Algebraisches Diagonalisierbarkeitskriterium [5.3.3]

F diagonalisierbar

$\Updownarrow$

χ_F zerfällt in Linearfaktoren und für jeden EW λ ist

$\begin{pmatrix}\text{geom. Vielf.} \\ \text{von } \lambda\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{alg. Vielf.} \\ \text{von } \lambda\end{pmatrix}$

Korollar: Zerfällt χ_F in paarweise <u>verschiedene</u> Linearfaktoren, so ist F diagonalisierbar.

also jeweils alg. Vielfachheit $= 1$.